

Correction du DM n°2

Exercice 1

1. C'est une somme télescopique, d'après le cours,

$$T_n = (n+1)^3 - 1.$$

2. Pour tout entier naturel k ,

$$\begin{aligned}(k+1)^3 - k^3 &= k^3 + 3k^2 + 3k + 1 - k^3 \\ &= 3k^2 + 3k + 1.\end{aligned}$$

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$T_n = \sum_{k=1}^n (3k^2 + 3k + 1)$$

$$T_n = \sum_{k=1}^n 3k^2 + \sum_{k=1}^n 3k + \sum_{k=1}^n 1$$

$$T_n = 3 \sum_{k=1}^n k^2 + 3 \sum_{k=1}^n k + n$$

$$T_n = 3S_n + 3 \frac{n(n+1)}{2} + n$$

3. D'après les question 1 et 2,

$$3S_n = T_n - 3 \times \frac{n(n+1)}{2} - n$$

$$3S_n = (n+1)^3 - 1 - 3 \times \frac{n(n+1)}{2} - n$$

$$3S_n = (n+1)^3 - 3 \times \frac{n(n+1)}{2} - (n+1)$$

$$3S_n = (n+1) \left((n+1)^2 - \frac{3}{2}n - 1 \right)$$

$$3S_n = (n+1) \left(n^2 + 2n + 1 - \frac{3}{2}n - 1 \right)$$

$$3S_n = (n+1) \left(n^2 + \frac{1}{2}n \right)$$

$$3S_n = (n+1)n \left(n + \frac{1}{2} \right)$$

$$3S_n = \frac{(n+1)n(2n+1)}{2}$$

$$\text{Par conséquent, } S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{2 \times 3} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

4. Il suffit de développer l'expression de droite.

$$\begin{aligned}(n+2)(2(n+1)+1) &= (n+2)(2n+3) \\ &= 2n^2 + 4n + 3n + 6 \\ &= 2n^2 + 7n + 6\end{aligned}$$

5. 1ère étape: On veut montrer la proposition $\mathcal{P}_n : \left\{ \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right\}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

2ème étape: Initialisation. \mathcal{P}_1 s'écrit

$$\sum_{k=1}^1 k^2 = 1 \text{ et } \frac{1 \times 2 \times 3}{6} = 1. \text{ Donc l'initialisation est vérifiée.}$$

3ème étape: Hérité. On suppose que la proposition \mathcal{P}_n est vraie pour un certain rang $n \in \mathbb{N}^*$.

En utilisant l'hypothèse de récurrence on a:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k^2 &= \sum_{k=1}^n k^2 + (n+1)^2 \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\ &= \frac{(n+1)(n(2n+1) + 6(n+1))}{6} \\ &= \frac{(n+1)(2n^2 + 7n + 6)}{6}\end{aligned}$$

D'après la question 4. on a

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6}$$

On a montré que \mathcal{P}_{n+1} est vraie donc l'hérité est vérifiée.

Conclusion : On a montré que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

6. Pour tout entier n ,

$$\begin{aligned}A_n &= \sum_{k=1}^n k^2 - 2 \sum_{k=1}^n k - \sum_{k=1}^n 1 \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 2 \times \frac{n(n+1)}{2} - n \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1) - 6n(n+1) - 6n}{6} \\ &= \frac{n((n+1)(2n+1) - 6(n+1) - 6)}{6} \\ &= \frac{n(2n^2 - 3n - 11)}{6}\end{aligned}$$

Exercice 2

①. On veut montrer que $\mathcal{P}_n : \{a_n < 0\}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- Initialisation — $a_0 = -1 < 0$ donc \mathcal{P}_0 est vraie.

- Hérédité: On suppose que la proposition \mathcal{P}_n est vraie pour un certain rang n .

$$a_n > 0$$

Tableau de signe.

$$\Leftrightarrow -2a_n < 0$$

a_n	+
$3-2a_n$	+
$\frac{a_n}{3-2a_n}$	+

$$\Leftrightarrow 3 - 2a_n < 3$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3-2a_n} > \frac{1}{3} > 0$$

donc
$$a_{n+1} = \frac{a_n}{3-2a_n} > 0$$

\mathcal{P}_{n+1} est vraie donc (\mathcal{P}_n) est héréditaire

Conclusion: $\forall n \in \mathbb{N}, a_n < 0$

② D'après la question 1. $a_n < 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

donc $t_n = \frac{1}{a_n}$ est bien défini car $a_n \neq 0$.

③ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t_{n+1} = \frac{1}{a_{n+1}}$

$$t_{n+1} = \frac{1}{\frac{a_n}{3-2a_n}}$$

$$t_{n+1} = \frac{3-2a_n}{a_n}$$

$$t_{n+1} = \frac{3}{a_n} - 2$$

$$t_{n+1} = 3t_n - 2$$

④ On reconnaît une suite arithmético-géométrique.

On cherche à résoudre l'équation

$$x = 3x - 2$$

$$\Leftrightarrow 2 = 3x - x$$

$$\Leftrightarrow 2x = 2$$

$$\Leftrightarrow x = 1$$

On pose alors la suite $u_n = t_n - 1$.

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} &= t_{n+1} - 1 \\ u_{n+1} &= 3t_n - 2 - 1 \\ u_{n+1} &= 3t_n - 3 \\ u_{n+1} &= 3(t_n - 1) \\ u_{n+1} &= 3u_n.\end{aligned}$$

Donc la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison 3 et de premier terme $u_0 = -1 - 1 = -2$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 3^n \times u_0 = -2 \times 3^n$$

$$\text{Or } \forall n \in \mathbb{N} \quad t_n = u_n + 1.$$

$$\boxed{t_n = -2 \times 3^n + 1.}$$

⑤) 2) après les questions suivantes

$$a_n = \frac{1}{t_n}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \frac{1}{1 - 2 \times 3^n}}$$

Exercice 3 : $f: x \mapsto \frac{e^x}{e^{2x} + 1}$

1. (a) On a : $\forall x \in \mathbb{R}, -x \in \mathbb{R}$ et

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(-x) &= \frac{e^{-x}}{e^{-2x} + 1} \\ f(-x) &= \frac{e^{-2x} \times e^x}{e^{-2x}(1 + e^{2x})} \\ f(-x) &= \frac{e^x}{1 + e^{2x}}\end{aligned}$$

$$\boxed{f(-x) = f(x)}$$

1. (b) La fonction f est dérivable en tant que quotient de fonctions dérivables.

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) &= \frac{e^x(e^{2x} + 1) - 2e^{2x}e^x}{(e^{2x} + 1)^2} \\ f'(x) &= \frac{e^{3x} + e^x - 2e^{3x}}{(e^{2x} + 1)^2}\end{aligned}$$

suite de
1. (b)

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{-e^{3x} + e^x}{(e^{2x} + 1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{e^x (1 - e^{2x})}{(e^{2x} + 1)^2}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, e^x > 0 \\ (e^{2x} + 1)^2 > 0$$

On cherche donc le signe de $1 - e^{2x}$

$$\begin{aligned} 1 - e^{2x} &\geq 0 \\ \Leftrightarrow 1 &\geq e^{2x} \\ \Leftrightarrow 0 &\geq 2x \quad \left. \begin{array}{l} \text{la fonction } x \mapsto \ln(x) \text{ est} \\ \text{croissante.} \end{array} \right\} \\ \Leftrightarrow x &\leq 0 \end{aligned}$$

	$-\infty$	0	$+\infty$
signe de $f'(x)$	$+$	0	$-$
variations de f	\nearrow	$\frac{1}{2}$	\searrow

$$f(0) = \frac{e^0}{e^{2 \cdot 0} + 1}$$

$$f(0) = \frac{1}{2}$$

On recherche les limites en $\mp\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2x} + 1 = 1$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{e^{2x} + 1} = 0$$

Pour la limite en $+\infty$, on obtient une forme indéterminée $\frac{\infty}{\infty}$
mais

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{e^x}{e^x(e^x + e^{-x})} = \frac{1}{e^x + e^{-x}}$$

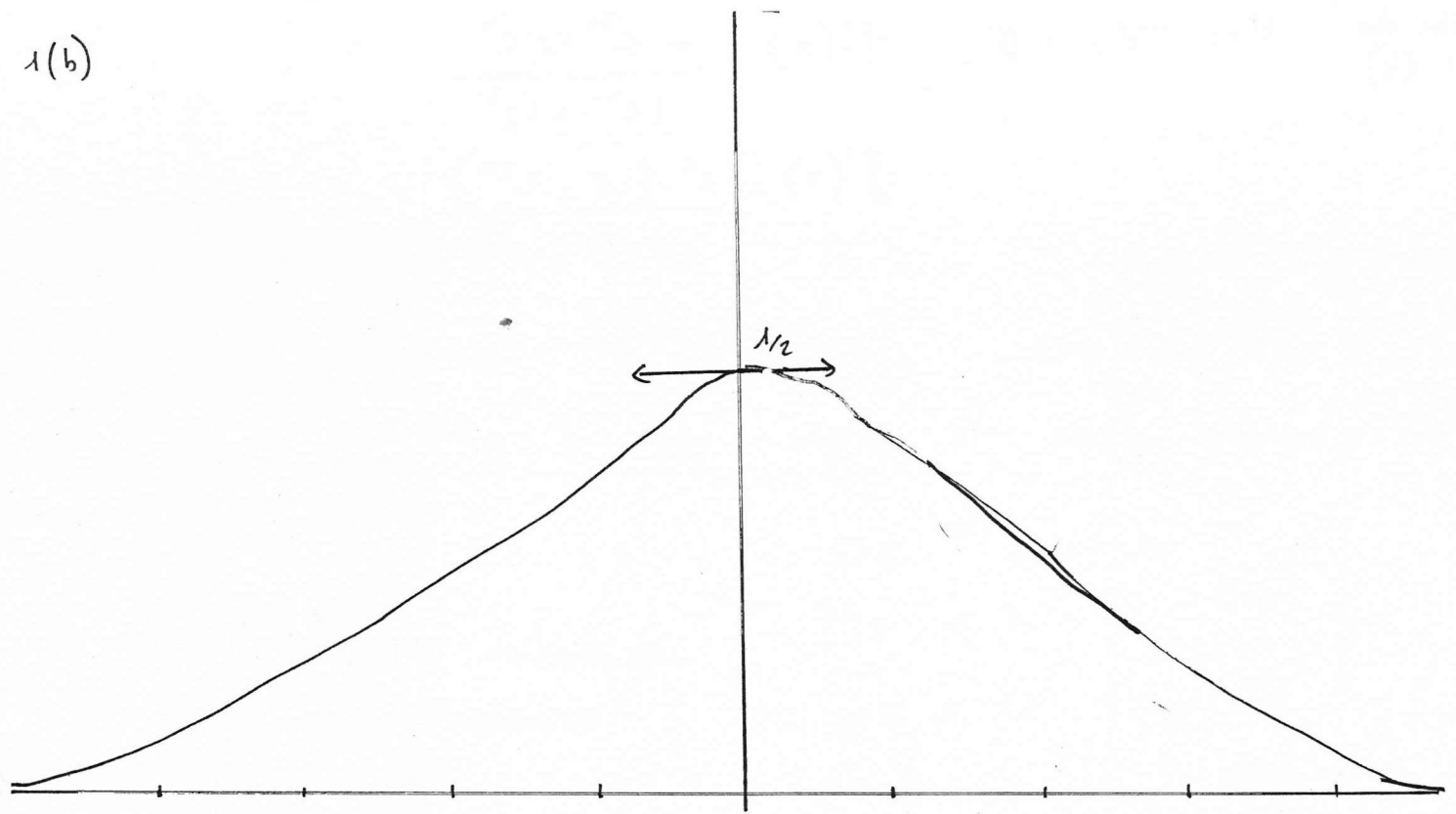
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x + e^{-x} = +\infty \quad \text{donc}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x + e^{-x}} = 0$$

1(b)



1(c) On pose la fonction $g: x \mapsto f(x) - x$.

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad g'(x) = f'(x) - 1$$

$$g'(x) = \frac{-e^{3x} + e^x}{(e^{2x} + 1)^2} - \frac{(e^{2x} + 1)^2}{(e^{2x} + 1)^2}$$

$$g'(x) = \frac{-e^{3x} + e^x - e^{4x} - 2e^{2x} - 1}{(e^{2x} + 1)^2}$$

Tous les termes du numérateur sont négatifs sauf e^x

Or si $x \geq 0$

$$\begin{aligned} x &< 2x \\ \Leftrightarrow e^x &< e^{2x} \\ \Leftrightarrow e^x - e^{2x} &< 0 \end{aligned}$$

Si $x \leq 0$

$$\begin{aligned} e^x &\leq 1 \\ \Leftrightarrow e^x - 1 &\leq 0 \end{aligned}$$

Donc dans tous les cas, $g'(x) \leq 0$.

- g est une fonction strictement décroissante
- g est continue en tant que somme et quotient de fonctions continues.
- De plus $g(0) = \frac{1}{2} > 0$ et $g(\frac{1}{2}) = f(\frac{1}{2}) - \frac{1}{2} < 0$ (Énoncé)

Donc d'après le théorème² des valeurs intermédiaires, il existe un unique réel ℓ tel que $g(\ell) = 0$. De plus $0 \leq \ell \leq \frac{1}{2}$.

1(c) En conclusion, $\exists ! \ell \in [0; \frac{1}{2}]$ tel que

$$\begin{aligned} g(\ell) &= 0 \\ \Leftrightarrow f(\ell) &= \ell \end{aligned}$$

1(d) 1^{er} cas $x \leq 0$

Dans ce cas $f'(x) \geq 0$ donc $|f'(x)| = f'(x)$

$$\begin{aligned} |f'(x)| - f(x) &= \frac{e^x - e^{3x}}{(e^{2x} + 1)^2} - \frac{e^x}{(1 + e^{2x})} \\ &= \frac{e^x - e^{3x}}{(1 + e^{2x})^2} - \frac{e^x(1 + e^{2x})}{(1 + e^{2x})^2} \\ &= \frac{e^x - e^{3x} - e^x - e^{3x}}{(1 + e^{2x})^2} \\ &= \frac{-2e^{3x}}{(1 + e^{2x})^2} \end{aligned}$$

Or $\forall x \in \mathbb{R} \quad (1 + e^{2x})^2 > 0$
 $-2e^{3x} < 0$

donc $|f'(x)| - f(x) \leq 0$

d'où $|f'(x)| \leq f(x)$

2^{eme} cas $x \geq 0$

Dans ce cas $|f'(x)| = -f'(x)$

$$\begin{aligned} -f'(x) - f(x) &= -\left(\frac{e^x - e^{3x}}{(e^{2x} + 1)^2}\right) - \frac{(e^x + e^{3x})}{(e^{2x} + 1)^2} \\ &= \frac{-2e^x}{(e^{2x} + 1)^2} \end{aligned}$$

d'où $|f'(x)| - f(x) \leq 0$

\Leftrightarrow $|f'(x)| \leq f(x)$

Et comme f admet un maximum en 0, $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \leq f(0)$

Donc $\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \quad |f'(x)| \leq f(x) \leq \frac{1}{2}}$

$$2) \quad u_0 = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = f(u_n).$$

(a) On montre par récurrence que
 $\forall n \in \mathbb{N}$ la proposition $P_n: \{ u_n \in [0; \frac{1}{2}] \}$ est vraie

Initialisation: P_0 s'écrit $u_0 \in [0; \frac{1}{2}]$

Or $u_0 = 0$ donc P_0 est vraie.

Hérédité: On suppose que P_n est vraie pour un certain rang $n \geq 0$.

$$u_n \in [0; \frac{1}{2}]$$

$$\text{Or } \forall x \in [0; \frac{1}{2}] \quad 0 < f(x) \leq \frac{1}{2}$$

$$\text{donc } 0 < f(u_n) \leq \frac{1}{2}$$

$$0 < u_{n+1} \leq \frac{1}{2}$$

Donc P_{n+1} est vraie

(P_n) est héréditaire et donc $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \in [0; \frac{1}{2}]$

2 (b) On sait que $|f'(x)| \leq \frac{1}{2} \quad \forall x \in \mathbb{D}^2$. (question 1(d)).

Par le théorème des accroissements finis, on a donc

$$|f(u_n) - f(\ell)| \leq \frac{1}{2} |u_n - \ell|$$

$$|u_{n+1} - \ell| \leq \frac{1}{2} |u_n - \ell|.$$

On montre alors par récurrence ~~que~~ $R_n: \{ |u_n - \ell| \leq \frac{1}{2^{n+1}} \}$

Initialisation: R_0 s'écrit

$$|u_0 - \ell| \leq \frac{1}{2}$$

$$\text{Or } u_0 = 0 \quad \text{donc } |u_0 - \ell| = |-\ell| = \ell \leq \frac{1}{2}$$

Hérédité: On suppose la proposition R_n (question 1(c)) vraie pour un certain rang n .

$$|u_n - \ell| \leq \frac{1}{2^{n+1}}$$

$$\text{Or } |u_{n+1} - \ell| \leq \frac{1}{2} |u_n - \ell|$$

$$\leq \frac{1}{2} \times \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^{n+2}}$$

Donc R_{n+1} est vraie

(R_n) est héréditaire et donc $\forall n \in \mathbb{N} \quad |u_n - \ell| \leq \frac{1}{2^{n+1}}$